Ejercicios aplicaciones de la integral. Áreas

1. Hallar el área limitada por la recta $x + y = 10$, el eje OX y las ordenadas de $x = 2$ y $x = 8$.

2. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 9 - x^2$ y el eje OX.

3. Calcular el área del triángulo de vértices A(3, 0), B(6, 3), C(8, 0).

4. Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $y^2 = 4x$ e $y = x^2$.

5. Calcular el área limitada por la curva $xy = 36$, el eje OX y las rectas: $x = 6$, $x = 12$.

6. Calcular el área limitada por la curva $y = 2(1 - x^2)$ y la recta $y = -1$.

7. Calcular el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 + 2$ y la recta que pasa por los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 4)$.

8. Hallar el área limitada por la recta , $y = \frac{3x - 6}{2}$ el eje de abscisas y las ordenadas correspondientes a $x = 0$ y $x = 4$.

9. Calcular el área limitada por la curva $y = 6x^2 - 3x^3$ y el eje de abscisas.

10. Hallar el área de la región del plano limitada por las curvas $y = \ln x$, $y = 2$ y los ejes coordenados.

11. Calcular el área de la región del plano limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 9$.

12. Hallar el área de una elipse de semiejes a y b.

13. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva: $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ y el eje OX.

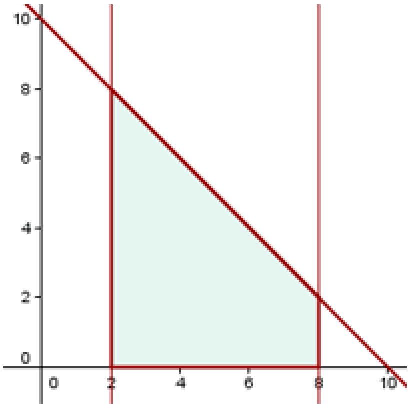
14. Hallar el área de la figura limitada por: $y = x^2$, $y = x$, $x = 0$, $x = 2$

15. Hallar el área del recinto plano y limitado por la parábola $y = 4x - x^2$ y las tangentes a la curva en los puntos de intersección con el eje OX.

Soluciones ejercicios aplicaciones de la integral. Áreas

1

Hallar el área limitada por la recta x + y = 10, el eje OX y las ordenadas de x = 2 y x = 8.



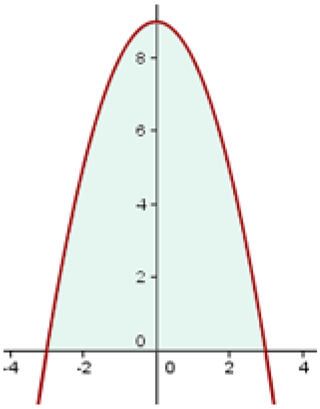
$$A = \int_2^8 (10 - x)\, dx = \left[10x - \frac{x^2}{2}\right]_2^8 = 30\ u^2$$

2

Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 9 - x^2$ y el eje OX.

En primer lugar hallamos los puntos de corte con el eje OX para representar la curva y conocer los límites de integración.

$0 = 9 - x^2 \qquad x = 3 \qquad x = -3$



Como la parábola es simétrica respecto al eje OY, el área será igual al doble del área comprendida entre x = 0 y x = 3.

$$A = \int_{-3}^{3} (9 - x^2)\, dx = 2\int_0^3 (9 - x^2)\, dx = 2\left[9x - \frac{x^3}{3}\right] = 36 u^2$$

3

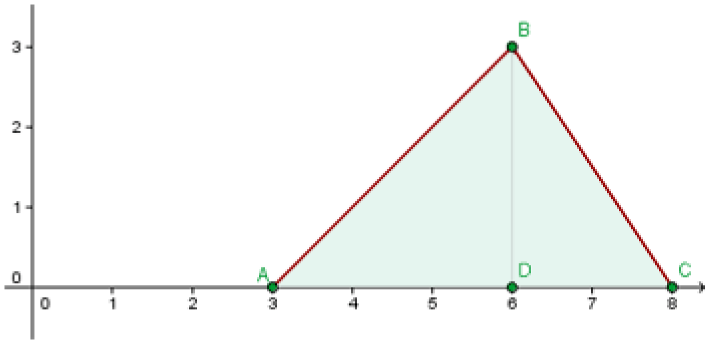
Calcular el área del triángulo de vértices A(3, 0), B(6, 3), C(8, 0).

Ecuación de la recta que pasa por AB:

$$\frac{x-3}{6-3}=\frac{y-0}{3-0} \qquad y=x-3$$

Ecuación de la recta que pasa por BC:

$$\frac{x-8}{6-8}=\frac{y-0}{3-0} \qquad y=-\frac{3}{2}(x-8)$$



$$A=\int_3^6 (x-3)\,dx+\int_6^8\left[-\frac{3}{2}(x-8)\right]dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_3^6+\left[-\frac{3}{4}x^2+12x\right]_6^8=$$

$$=\left(18-18-\frac{9}{2}+9\right)+(-48+96+27-72)=\frac{15}{2}u^2$$

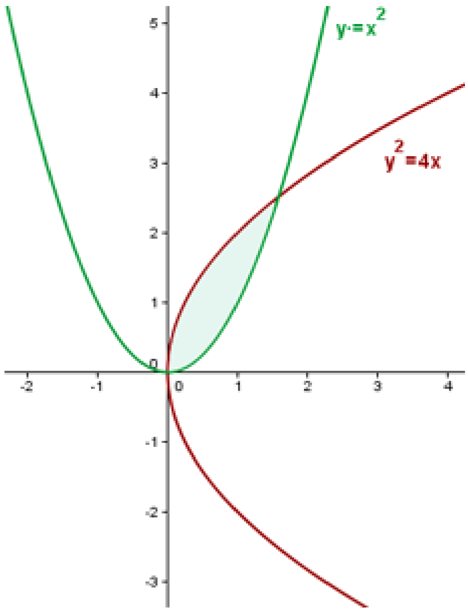
4

Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $y^2 = 4x$ e $y = x^2$.

$$\begin{cases} y^2=4x \\ y=x^2 \end{cases} \qquad (x^2)^2=4x \qquad x^4-4x=0 \qquad x(x^3-4)=0$$

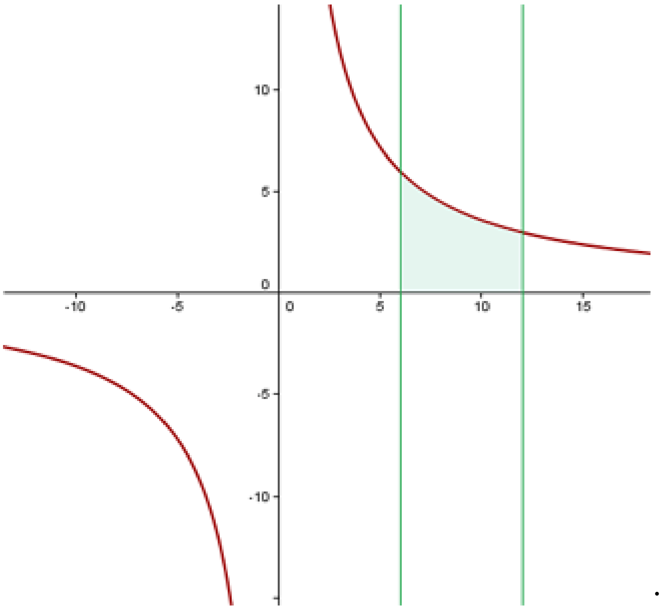
$$x=0 \qquad x=\sqrt[3]{4}$$

$$A=\int_0^{\sqrt[3]{4}}\left(2\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt[3]{4}}=\frac{4}{3}u^2$$



5

Calcular el área limitada por la curva xy = 36, el eje OX y las rectas: x = 6, x = 12.

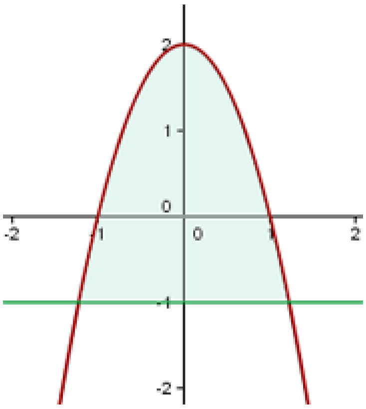


$$A = \int_6^{12} \frac{36}{x}\,dx = \left[36 \ln x\right]_6^{12} = 36 \ln 2\,u^2$$

6

Calcular el área limitada por la curva $y = 2(1 - x^2)$ y la recta $y = -1$.

$$\begin{cases} y = 2(1-x^2) \\ y = -1 \end{cases} \qquad 2(1-x^2) = -1 \qquad x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$



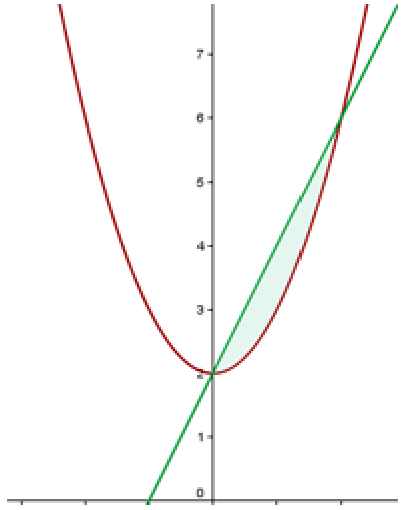
$$A = \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (2 - 2x^2 + 1)\,dx = 2\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (3 - 2x^2)\,dx = 2\left[3x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} =$$

$$= 2\left(3\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 2\left(\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}\,u^2$$

7

Calcular el área del recinto limitado por la parábola y = x^2 + 2 y la recta que pasa por los puntos (−1, 0) y (1, 4).

$$\frac{x+1}{1+1} = \frac{y}{4} \qquad 4(x+1) = 2y \qquad y = 2x+2$$

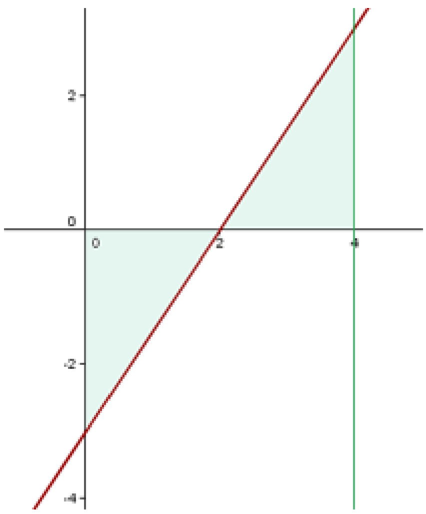


$$\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 2x+2 \end{cases} \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$$

$$\int_0^2 \left(2x + 2 - x^2 - 2\right) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} u^2$$

8

Hallar el área limitada por la recta $y = \frac{3x-6}{2}$, el eje de abscisas y las ordenadas correspondientes a x = 0 y x = 4.



$$A_1 = \int_0^2 \left(\frac{3x-6}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_0^2 = \frac{1}{2}(6-12) = -3$$

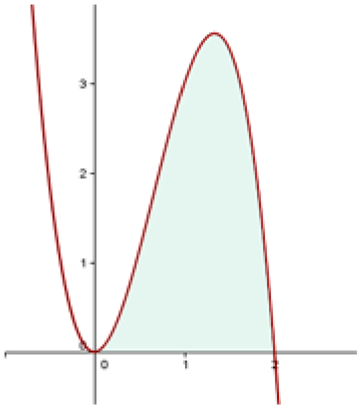
$$A_2 = \int_2^4 \left(\frac{3x-6}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_2^4 = \frac{1}{2}\left[(24-24)-(6-12)\right] = 3$$

$$A = |A_1| + A_2 = |-3| + 3 = 6u^2$$

9

Calcular el área limitada por la curva $y = 6x^2 - 3x^3$ y el eje de abscisas.

$6x^2 - 3x^3 = 0 \qquad 3x^2(2-x) = 0 \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = 2$



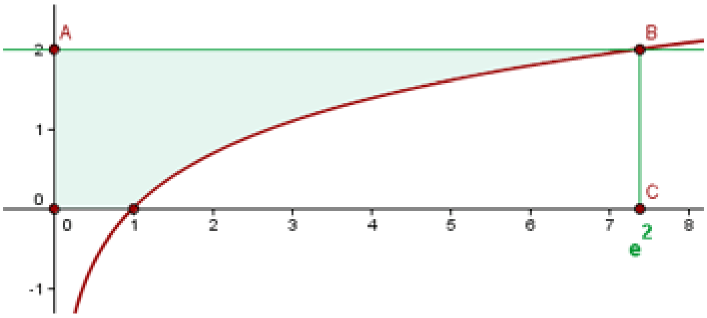
$$A = \int_0^2 (6x^2 - 3x^3)\, dx = \left[2x^3 - \frac{3}{4}x^4\right]_0^2 = 16 - 12 = 4u^2$$

10

Hallar el área de la región del plano limitada por las curvas y = ln x, y = 2 y los ejes coordenados.

Calculamos el punto de corte de la curva y la recta y = 2.

$\ln x = 2 \qquad e^2 = x$



El área es igual al área del rectángulo OABC menos el área bajo la curva y = ln x.

El área de rectángulo es base por altura.

$A_1 = e^2 \cdot 2 = 2e^2\ u^2$

El área bajo la curva y = ln x es:

$$A_2 = \int_1^{e^2} \ln x \, dx$$

$$v = \ln x \xrightarrow{\text{derivar}} v' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 1 \xrightarrow{\text{integrar}} v = x$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$A_2 = \int_1^{e^2} \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^{e^2} = 2e^2 - e^2 + 1 = (e^2 + 1)u^2$$

$$A = 2e^2 - e^2 - 1 = (e^2 - 1)u^2$$

11

·Calcular el área de la región del plano limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 9$.

El área del círculo es cuatro veces el área encerrada en el primer cuadrante y los ejes de coordenadas.

$$\int \sqrt{9 - x^2} \, dx$$

$$x = 3 sen\, t$$

$$dx = 3 \cos t dt$$

$$\int_0^r \sqrt{9 - x^2} = \int \sqrt{9 - 9 \operatorname{sen}^2 t} \, 3 \cos t dt = \int \sqrt{9(1 - \operatorname{sen}^2 t)} \, 3 \cos t dt =$$

$$= \int 9 \cos^2 t dt = 9 \int \cos^2 t dt = 9 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 9 \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 2t \right] + C$$

Hallamos los nuevos límites de integración.

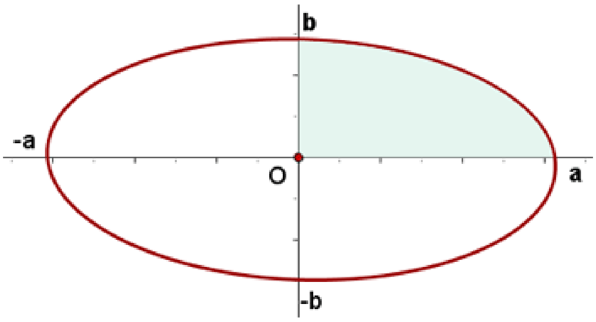
$x = 0$	$0 = r\, sen\, t$	$sen\, t = 0$	$t = 0$
$x = 3$	$3 = 3 sen\, t$	$sen\, t = 1$	$t = \frac{\pi}{2}$

$$A_1 = 9 \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 9 \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{9}{4} \pi$$

$$A = 4 A_1 = 9\pi \, u^2$$

12

Hallar el área de una elipse de semiejes a y b.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Por ser la elipse una curva simétrica, el área pedida será 4 veces el área encerrada en el primer cuadrante y los ejes de coordenadas.

$$A=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ dx$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\ dx$$

$$x = a\,sen\,t$$

$$dx = a\cos t\,dt$$

$$\int_0^r \sqrt{a^2-x^2} = \int \sqrt{a^2-a^2\,\text{sen}^2 t}\;a\cos t\,dt = \int \sqrt{a^2\left(1-\text{sen}^2 t\right)}\;a\cos t\,dt =$$

$$= \int a^2\,\cos^2 t\,dt = a^2\int \cos^2 t\,dt = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = a^2\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\text{sen}^2\,2t\right] + C$$

Hallamos los nuevos límites de integración.

$x = 0$	$0 = r\,sen\,t$	$\text{sen}\,t = 0$	$t = 0$
$x = a$	$a = a\,sen\,t$	$\text{sen}\,t = 1$	$t = \frac{\pi}{2}$

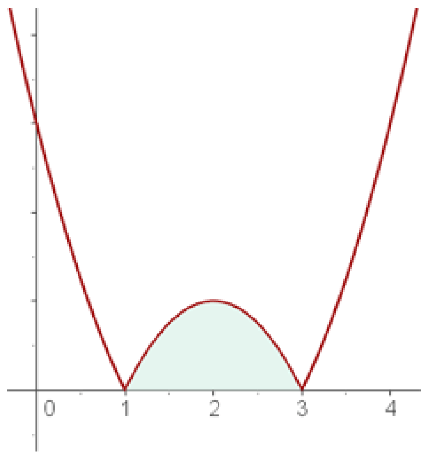
$$A=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ dx = \frac{4\,b}{a}\cdot a^2\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\text{sen}^2\,2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4ab\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi ab$$

13

Calcular el área de la región del plano limitada por la curva: $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ y el eje OX.

$x^2 - 4x + 3 = 0$ $\qquad x = 1 \qquad x = 3$

$$f(x) = \begin{cases} x^2-4x+3 & si\ \ x \le 1 \\ -\left(x^2-4x+3\right) & si\ \ 1 < x < 3 \\ x^2-4x+3 & si\ \ x \ge 3 \end{cases}$$



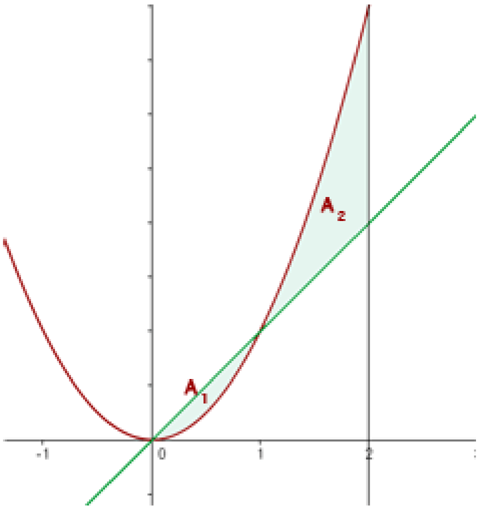
$$A = \int_1^3 -\left(x^2-4x+3\right)dx = -\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_1^3 = \frac{4}{3}u^2$$

14

Hallar el área de la figura limitada por: $y = x^2$, $y = x$, $x = 0$, $x = 2$

Puntos de corte de la parábola y la recta $y = x$.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases} \qquad x^2 = x \qquad x = 0 \quad x = 1$$



De $x = 0$ a $x = 1$, la recta queda por encima de la parábola.

$$A_1 = \int_0^1 \left(x - x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6} u^2$$

De $x = 1$ a $x = 2$, la recta queda por debajo de la parábola.

$$A_2 = \int_1^2 \left(x^2 - x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{5}{6} u^2$$

$$A = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1\ u^2$$

15

Hallar el área del recinto plano y limitado por la parábola $y = 4x - x^2$ y las tangentes a la curva en los puntos de intersección con el eje OX.

Puntos de intersección:

$$4x - x^2 = 0 \qquad x(4 - x) = 0 \qquad (0, 0) \quad (4, 0)$$

Ecuación de la tangente a la parábola en el punto (0, 0):

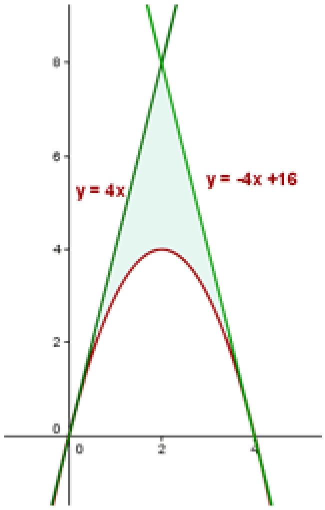
$$y' = 4 - 2x \qquad m = f'(0) = 4$$

$$y - 0 = 4(x - 0) \qquad y = 4x$$

Ecuación de la tangente a la parábola en el punto (4, 0):

$y' = 4 - 2x$ $\quad\quad$ $m = f'(4) = -4$

$y - 0 = 4(x - 4)$ $\quad\quad$ $y = -4x + 16$



$$A = \int_0^2 \left[4x - \left(4x - x^2\right)\right] dx + \int_2^4 \left[\left(-4x + 16\right) - \left(4x - x^2\right)\right] dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 16x\right]_2^4 = \frac{16}{3} u^2$$